Plusieurs exercices de la douzième séance de TD

Décembre 2006

1 Offre du travail

1.1 énoncé

On considère un ménage dont les préférences portent sur la consommation et le temps consacré aux activités non professionnelles (appelé temps de loisir). On représente par un bien unique la consommation de ce ménage et on note C le volume de cette consommation. On note l le temps de loisir et on suppose que ce ménage peut travailler pendant une durée maximale posée égale à H. Le revenu de ce ménage est noté R. On note w le taux de salaire unitaire et on suppose que le prix du bien de consommation est égal à p. Les préférences du ménage sont représentées par la fonction d'utilité :

$$U(C, l) = \alpha C l \tag{1}$$

où α est un paramètre positif.

Déterminez l'offre de travail de ce ménage en fonction de w, H et p.

1.2 Correction brève de l'exercice

On détermine l'offre de travail en calculant la demande de bien de consommation et la demande de loisir. Le choix optimal du ménage se fait en analysant sa contrainte budgétaire, et en recherchant le panier procurant la plus grande utilité possible sur la contrainte budgétaire.

Ici, le problème est très standard, en effet, les préférences sont de type Cobb-Douglas, les coefficients budgétaires étant respectivement 1/2 et 1/2. On trouve

$$\left\{\begin{array}{lcl} C & = & \dfrac{1}{2}\dfrac{\{\text{Ressources}\}}{p} \\[2ex] l & = & \dfrac{1}{2}\dfrac{\{\text{Ressources}\}}{w} \end{array}\right.$$

où les ressources du ménages sont le second membre de la contrainte budgétaire, c'est-à-dire wH. La contrainte budgétaire étant en effet dans ce modèle

$$wl + pC \leq wH$$

On trouve donc

$$\begin{cases} C &= \frac{1}{2}\frac{\text{wH}}{p} \\ \\ l &= \frac{H}{2} \end{cases}$$

et l'offre de travail $H - l = H/2$

2 Courbe d'offre du travail

2.1 énoncé

Soit une fonction d'utilité :

$$U = \frac{Rl}{l + R}$$

où R est le revenu provenant exclusivement du travail et l représente le loisir. H est le temps total disponible à consacrer au travail (t) et au loisir (l). w représente le taux de salaire horaire.

1) Calculez la fonction d'offre de travail ainsi que son élasticité par rapport au salaire. Qu'en pensez vous ?

2) Supposons $H = 24$. Dans un premier temps $w = 1$, dans un second temps $w = 4$, calculer les demandes associées puis dissocier l'effet revenu et l'effet substitution par la méthode de la différence de coût. Commenter les résultats.

2.2 Corrigé détaillée

Remarque préliminaire Vous pouvez être étonné par cette fonction d'utilité dépendant des deux variables loisir et revenu. En effet, le revenu n'est pas toujours une variable que l'on a l'habitude de considérer comme argument de la fonction d'utilité. En particulier, dans le cours, on aura plutôt défini l'utilité comme une fonction du loisir et de la consommation. Cependant, la consommation que l'on considère est un bien composite de consommation, dont le prix est souvent $p = 1$ et qui est représenté, de manière équivalent, par le revenu qui est disponible pour la consommation. Il n'est donc pas choquant dans ce cadre de définir une fonction d'utilité dépendant du revenu.

Correction de la question 1) Pour calculer l'offre de travail t, il est nécessaire de calculer la demande optimale du ménage et en particulier sa demande de loisir. Cette demande optimale est celle qui donne à l'agent la plus grande utilité —compatible avec la contrainte budgétaire. Lorsque les préférences sont convexes (ce qui est implicitement le cas dans cet énoncé), on sait que toute solution qui n'est pas en coin est sur la contrainte budgétaire et satisfait l'égalité du TMS de loisir en revenu avec le prix relatif du loisir (cad ici W). On commence par calculer le TMS de loisir en revenu qui est le rapport de deux utilités marginales (par rapport au loisir et par rapport au revenu)

$$\begin{array}{rcl} \frac{\partial U}{\partial l} & = & \frac{R^2}{(l+R)^2} \\ \frac{\partial U}{\partial l} & = & \frac{l^2}{(l+R)^2} \\ TMS & = & \frac{R^2}{l^2} \end{array}$$

Revenu optimal et demande de loisir sont donc les solutions du système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} wl + R & \leq & wH \\ \dfrac{R^2}{l^2} & = & \frac{w}{1} = w \end{array} \right.$$

La résolution, se fait par subsitution

$$\left\{ \begin{array}{rcl} R & = & l\sqrt{w} \\ \text{puis,} & & \\ l(w+\sqrt{w}) & \leq & wH \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} l & = & \dfrac{\sqrt{w}H}{\sqrt{w}+1} \\ & & \\ R & = & \dfrac{wH}{\sqrt{w}+1} \end{array} \right.$$

On en déduit alors l'offre de travail $t = H - l$:

$$t = H - \frac{\sqrt{w}H}{\sqrt{w}+1} = \frac{H}{\sqrt{w}+1}$$

On peut noter dès maintenant que plus le temps disponible à consacrer au travail et au loisir et grand, plus l'offre de travail est grande. Par ailleurs, lorsque le salaire augmente, l'offre de travail diminue. On précise ce dernier élément en calculant l'élasticité de l'offre de travail par rapport au salaire:

$$\varepsilon_{t/w} = \frac{\frac{\Delta t}{t}}{\frac{\Delta w}{w}} = \frac{\partial t}{\partial w} * \frac{w}{t} = \frac{\partial t}{\partial w} * w * \frac{1}{t}$$

L'offre de travail dépend du salaire (comme on l'a remarqué plus haut), sa dérivée (partielle) est:

$$\frac{\partial t}{\partial w} = \frac{-H}{2\sqrt{w}(\sqrt{w}+1)^2}$$

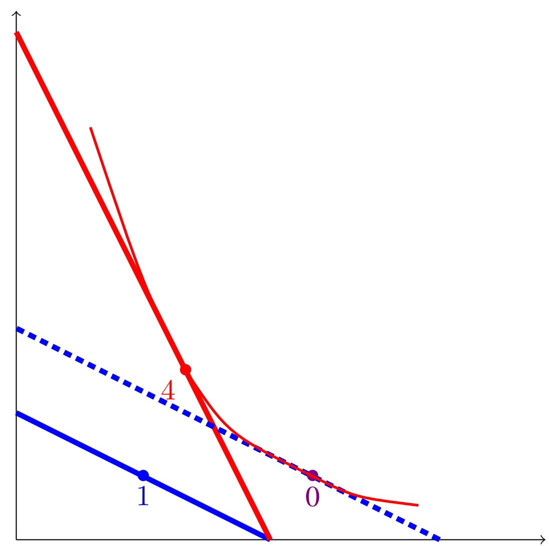
On trouve finalement l'élasticité de l'offre de travail par rapport au salaire

$$\varepsilon_{t/w} = \frac{-H}{2\sqrt{w}(\sqrt{w}+1)^2} * w * \frac{\sqrt{w}+1}{H} = \frac{-\sqrt{w}}{2(\sqrt{w}+1)}$$

On remarque que cette élasticité est en valeur absolue inférieure à 1/2. l'offre de travail n'est pas très élastique au salaire. Par ailleurs, cette valeur de l'élasticité se rapproche de zéro lorsque le salaire est faible: la sensibilité au niveau de salaire devient plus faible pour les petits salaires.

Correction de la question 2)

Il s'agit de calculer les deux demandes optimales pour les deux niveaux de salaires, et de calculer l'augmentation de revenus non salariaux qui permettrait d'obtenir le même niveau d'utilité, afin d'évaluer en termes monétaires cette augmentation de salaire. On commence par calculer les demandes de loisir et de revenu correspondant à ces deux niveaux de salaire, en utilisant la formule de la question 1). On calcule par ailleurs les niveaux d'utilité correspondants.



$$w = 1 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} l = \frac{24}{2} = 12 \\ R = \frac{24}{2} = 12 \\ U = 6 \end{cases}$$

[b]

$$w = 4 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} l = \frac{48}{3} = 16 \\ R = \frac{4}{3} * 24 = 32 \\ U = 10,6666 \end{cases}$$

L'énoncé suggère d'analyser le passage du panier optimal obtenu à $W = 1$ au panier optimal obtenu à $W = 4$ en un effet revenu et un effet substitution, afin de quantifier en terme de revenu l'augmentation du bien être de l'agent provoquée par cette augmentation de salaire.

Pour cela, il suffit de calculer le revenu qu'il faudrait donner à l'agent pour qu'il obtienne la même utilité, cad le revenu qui lui permet de passer de la contrainte bleue à la contrainte bleue hachurée.

La méthode est standard, il est nécessaire de calculer le panier (noté 0 sur le graphique) qui se trouve sur la courbe d'indifférence $U = 10,6666$ et dont le TMS égale 1. Les équations de ce panier sont donc:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \frac{lR}{l+R} & = & 32/3 \\ \frac{R^2}{l^2} & = & 1 \end{array}\right.$$

La résolution, se fait par subsitution

$$\left\{\begin{array}{ccc} R & = & l \\ \text{puis,} & & \\ R & = & 64/3 \end{array}\right.$$

On en déduit la différence de revenu, qui est le coût de ce panier moins le coût du panier initial, aux prix $p = 1$ et $w = 1$, soit:

$$\Delta R = 128/3 - 24 = 56/3 = 28,666$$